ICARE

Exercice :
Soit (E) une ellipse de foyers F et F' . soit M un point de cette ellipse .
Démontrer que la normale en M à la courbe est bissectrice de l'angle (MF,MF') .

Problème:

Les parties de ce problème sont, dans une large mesure indépendantes. toutefois, la dernière partie synthétise les résultats obtenus auparavant.

PARTIE I

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions f de la forme $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}P(t)$ où P est un polynôme à coefficients réels.

1°) **Montrer que** $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur **R**

2°) Pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{H}$, on pose $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$

a- **Montrer que** cette intégrale converge ;

b - **Montrer qu'on** définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

PARTIE II

Pour tout entier naturel n, on note H_n la fonction définie sur R par :

$$H_n(t) = e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{-t^2}\right]$$

$\frac{d^n}{dt^n}$ désignant la dérivée $n^{ème}$ par rapport à t.

1°) **Montrer que** pour tout n, H_n est un polynôme de degré n et préciser le coefficient du terme de degré n.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $\phi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)$

a **Montrer que** si $n \neq p$ $\langle \phi_n|\phi_p\rangle = 0$

b **Calculer** $\langle \phi_n|\phi_n\rangle$, on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$

c **En déduire** une famille orthonormale de $\mathcal{H}$.

PARTIE III

1°) **Montrer que** , pour tout entier n, la fonction $t \mapsto \frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}]$
est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre que l'on explicitera.

2°) **En déduire que**
$\forall n \in N\ H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0$
H_n' *et* H_n'' désignant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de H_n .

PARTIE IV

On considère plus généralement, μ désignant un réel quelconque et x une fonction de la variable t, l'équation différentielle
(E_μ) $x'' - 2tx' + 2\mu x = 0$

1°) **Montrer que** E_μ admet une solution paire $P_\mu(t)$ et une solution impaire $I_\mu(t)$ telles que $P_\mu(0) = 1$ et $I_\mu'(0) = 1$ développables en séries entières sur R

2°) **En déduire** toutes les solutions de E_μ

3°) **Déterminer** toutes les valeurs de μ pour lesquelles E_μ admet des solutions polynomiales non nulles . Expliciter alors ces solutions.

4°) **En déduire** les coefficients du polynôme H_n.

5°) **Montrer que** , pour tout réel μ, l'une au moins des fonctions P_μ ou I_μ n'est pas polynômiale.

PARTIE V

1°) On suppose, par exemple que P_μ n'est pas polynômiale.

Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geq N \quad (n+1)\dfrac{a_\mu(n+1)}{a_\mu(n)} \geq \dfrac{3}{4}$

en notant $P_\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_\mu(n) t^{2n}$

2°) **En déduire que** $\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} |P_\mu(t)| = +\infty$

3°) **Etudier** de même la limite de $e^{-\frac{t^2}{2}} |P_\mu(t)|$ lorsque t tend vers $-\infty$

4°) **Enoncer et démontrer** un résultat analogue pour la fonction
$I_\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_\mu(n) t^{2n+1}$

5°) **Déterminer** les valeurs de μ pour lesquelles l'équation E_μ admet une solution x non nulle telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 e^{-t^2} dt$ soit convergente.

Déterminer alors toutes ces solutions.

6°) **Etudier**, de même, l'existence de solutions x de E_μ telles que

$t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} x(t)$ soit bornée sur **R**.